

STATISTICS Paper II

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.
Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Questions no. 1 and 5 which are compulsory, and any **three** of the remaining questions selecting at least **one** question from each Section.

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/Notations used carry usual meaning, unless otherwise indicated.

Charts/Figures, wherever required, are to be drawn in the answer book itself and **not** on separate graph sheet.

IMPORTANT : Whenever a question is being attempted, all its parts/sub-parts must be attempted contiguously. This means that before moving on to the next question to be attempted, candidates must finish attempting all parts/sub-parts of the previous question attempted. This is to be strictly followed.

Pages left blank in the answer-book are to be clearly struck out in ink. Any answers that follow pages left blank may not be given credit.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

SECTION A

1.
 - (a) Describe single and double sampling plans used in acceptance sampling. Define the operating characteristic function of a sampling plan.
 - (b) The cost of maintenance of a machine is given as an increasing function of time and its scrap value is constant. If time is measured continuously, then show that the average cost will be minimized by replacing the machine when the average cost to date becomes equal to the current maintenance cost.
 - (c) Describe how the control chart based on sample ranges is constructed.
 - (d) Describe Type I and Type II censoring. Discuss the consequence of such censoring in the analysis of lifetime data.
 - (e) Show that in a linear programming problem, the feasible solutions form a convex set. $5 \times 12 = 60$

2.
 - (a) A person needs at least 10, 12 and 12 units of chemicals A, B and C respectively for his garden. A liquid product available in the market contains 5, 2 and 1 units of A, B and C respectively per jar. A dry product contains 1, 2 and 4 units of A, B and C per carton. The price of the liquid product is ₹ 3 per jar and that of the dry product is ₹ 2 per carton. How many jars and cartons should be purchased to meet the requirements and to minimize the cost? 30

खण्ड क

1. (क) स्वीकरण-प्रतिचयन में उपयोग में लाई जाने वाली एकल और द्विशः प्रतिचयन आयोजनाओं का वर्णन कीजिए। एक प्रतिचयन आयोजना के संकारक अभिलक्षण फलन को परिभाषित कीजिए।
- (ख) एक मशीन की रख-रखाव की लागत समय के एक वर्धमान फलन के रूप में दी हुई है और इसका स्क्रेप (रद्दी) मूल्य अचर है। यदि समय संततः मापा जाता है, तो दर्शाइए कि औसत लागत मशीन का तब प्रतिस्थापन करने से न्यूनतम होगी जब अब तक की औसत लागत वर्तमानकालिक रख-रखाव की लागत के बराबर होती है।
- (ग) वर्णन कीजिए कि प्रतिदर्श परिसरों पर आधारित नियंत्रण संचित्र की रचना कैसे की जाती है।
- (घ) प्रथम प्रकार और द्वितीय प्रकार के खंड-वर्जन का वर्णन कीजिए। जीवन-काल दत्तों के विश्लेषण में ऐसे खंड-वर्जन के परिणामों की चर्चा कीजिए।
- (ङ) दिखाइए कि एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सुसंगत हलों का समुच्चय एक सम्मिश्र समुच्चय होता है। 5×12=60
2. (क) एक व्यक्ति को अपने बगीचे के लिए रासायनिकों A, B और C की क्रमशः कम-से-कम 10, 12 और 12 मात्रकों की आवश्यकता होती है। बाजार में प्राप्य एक तरल पदार्थ में प्रति जार A, B और C के क्रमशः 5, 2 और 1 मात्रक हैं। एक शुष्क पदार्थ में प्रति कार्टन A, B और C के क्रमशः 1, 2 और 4 मात्रक हैं। तरल पदार्थ की प्रति जार कीमत ₹ 3 है और शुष्क पदार्थ की प्रति कार्टन ₹ 2 है। आवश्यकताओं को पूरा करने और लागत को न्यूनतम करने के लिए कितने जार और कार्टन खरीदने चाहिए? 30

- (b) Consider a zero-sum game between two persons A and B, where each player has three strategies A_1, A_2, A_3 and B_1, B_2, B_3 . Player A's payoff matrix is given below :

		Player B		
		B_1	B_2	B_3
Player A	A_1	15	2	3
	A_2	6	5	7
	A_3	-7	4	0

Is there a saddle point ? What are the optimal strategies for the two players ?

15

- (c) Arrivals at a telephone booth are considered to be according to a Poisson process with an average time of 10 minutes between two consecutive arrivals. The length of a phone call is assumed to be exponentially distributed with a mean of 3 minutes. What is the probability that a person coming to the booth will have to wait ? What is the average length of the queues that form from time to time ?

15

(ख) दो व्यक्तियों A और B के बीच एक शून्य-योग खेल लीजिए, जहाँ प्रत्येक खिलाड़ी की तीन युक्तियाँ A_1, A_2, A_3 और B_1, B_2, B_3 हैं। खिलाड़ी A का भुगतान आव्यूह नीचे दिया गया है :

		खिलाड़ी B		
		B_1	B_2	B_3
खिलाड़ी A	A_1	15	2	3
	A_2	6	5	7
	A_3	-7	4	0

क्या यहाँ एक पल्याण बिन्दु है ? दोनों खिलाड़ियों के लिए इष्टतम युक्तियाँ क्या हैं ?

15

(ग) एक टेलीफोन बूथ पर आगंतुकों की संख्या दो क्रमागत आगंतुकों के बीच 10 मिनट के औसत काल के साथ एक प्वासों प्रक्रम के अनुसार मानी जाती है। एक फोन कॉल की लंबाई औसत 3 मिनट के साथ चरघातांकीयतः बंटित कल्पित की जाती है। प्रायिकता क्या है कि बूथ पर आने वाले एक व्यक्ति को इंतजार करना पड़ेगा ? समय-समय पर बनने वाली पंक्तियों की औसत लंबाई क्या है ?

15

3. (a) A sample of 100 screws was selected on each of 25 successive days in a factory manufacturing screws, and each screw was examined for defects. The data for number of unacceptable screws on different days are given below :

Day	No. of defective screws	Day	No. of defective screws
1	7	14	6
2	4	15	2
3	3	16	9
4	6	17	7
5	4	18	6
6	9	19	7
7	6	20	11
8	7	21	6
9	5	22	7
10	3	23	4
11	7	24	8
12	8	25	6
13	4		

Assume that the production process was in control during the period. Determine the upper and the lower control limits (UCL and LCL) based on this data for the proportion of defective items.

30

3. (क) पेंचों का उत्पादन करने वाली एक फैक्टरी में 25 उत्तरोत्तर दिनों के प्रत्येक दिन 100 पेंचों का एक प्रतिदर्श चुना गया, और प्रत्येक पेंच को दोषों के लिए जाँचा गया। भिन्न दिनों पर अस्वीकार्य पेंचों की संख्या के आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

दिन	सदोष पेंचों की संख्या	दिन	सदोष पेंचों की संख्या
1	7	14	6
2	4	15	2
3	3	16	9
4	6	17	7
5	4	18	6
6	9	19	7
7	6	20	11
8	7	21	6
9	5	22	7
10	3	23	4
11	7	24	8
12	8	25	6
13	4		

कल्पना कीजिए कि उत्पादन प्रक्रम अवधि के दौरान नियंत्रण में था। इन आंकड़ों पर आधारित दूषित मदों के अनुपात के लिए उपरि तथा निम्न नियंत्रण सीमाएँ (UCL और LCL) निर्धारित कीजिए।

30

- (b) Consider an acceptance sampling plan where 50 items sampled from a huge lot will be examined and the lot will be accepted if at most two of the sampled items are found defective – otherwise the lot will be rejected. Evaluate the acceptance probability as a function of the proportion of defectives in the lot and sketch the Operating Characteristic (OC) curve. (Only a rough sketch is required and no graph paper is necessary)

30

4. (a) The following table gives the maintenance cost per year and the resale price in ₹ of a certain machine whose purchase price is ₹ 5,000 :

Year	Maintenance cost	Resale price
1	1500	3500
2	1600	2500
3	1800	1700
4	2100	1200
5	2500	800
6	2900	500

In which year is the replacement due ?

30

(ख) एक स्वीकरण प्रतिचयन आयोजना मान लीजिए जिसमें एक बृहत् प्रचय से चयनित 50 मदों को जाँचा जाएगा और प्रचय स्वीकार्य होगा यदि चयनित मदों में अधिकतम दो दूषित मद पाये जाते हैं, अन्यथा प्रचय अस्वीकार्य होगा । स्वीकरण प्रायिकता का प्रचय में दूषितों के अनुपात के फलन के रूप में मान निकालिए और संकारक अभिलक्षण वक्र खींचिए । (केवल एक मोटे तौर पर रेखाचित्र चाहिए और कोई ग्राफ पेपर की ज़रूरत नहीं है)

30

4. (क) किसी मशीन के, जिसकी खरीद कीमत ₹ 5,000 है, प्रति वर्ष रख-रखाव की लागत और पुनः बेचने की कीमत (₹ में) निम्न सारणी में दी गई है :

वर्ष	रख-रखाव लागत	पुनः बेचने की कीमत
1	1500	3500
2	1600	2500
3	1800	1700
4	2100	1200
5	2500	800
6	2900	500

प्रतिस्थापन किस वर्ष में उचित है ?

30

- (b) Consider a Markov chain with three states 0, 1 and 2. The state 0 is an absorbing state, while from any of the other two states the chain moves into any of the three states with equal probability (i.e. $p(a | b) = \frac{1}{3}$ for $a = 0, 1, 2$ and $b = 1, 2$). Starting from either state 1 or 2, let $N =$ the number of steps or transitions needed before absorption into state 0 takes place. Derive the probability distribution of N . What is the expected number of steps or transitions before absorption into state 0 ?

30

(ख) 0, 1 और 2 तीन अवस्थाओं के साथ एक मार्कोव शृंखला को मान लीजिए । अवस्था 0 एक अवशोषी अवस्था है, जबकि अन्य दो अवस्थाओं में से किसी से भी शृंखला सम प्रायिकताओं से (अर्थात् $p(a|b) = \frac{1}{3}$, $a = 0, 1, 2$ और $b = 1, 2$ के लिए) तीनों अवस्थाओं में से किसी में जा सकती है । अवस्था 1 या 2 किसी से भी प्रारम्भ करते हुए, माना कि $N =$ अवस्था 0 में अवशोषण होने से पूर्व के आवश्यक पगों या संक्रमणों की संख्या । N के प्रायिकता बंटन को व्युत्पन्न कीजिए । अवस्था 0 में अवशोषण से पूर्व पगों या संक्रमणों की प्रत्याशित संख्या क्या है ?

30

SECTION B

5. (a) For the AR(1) process defined as $X_t = 0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t$, where $t = 1, 2, 3, \dots$, $X_0 = 0$ and $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ are independent $N(0, \sigma^2)$ variables, what is the expression for the spectrum (i.e., spectral density) ?
- (b) Describe the problem of multi-collinearity in multiple linear regression. How does it affect parameter estimation ? Describe some solution for this problem.
- (c) Describe Laspeyres' and Paasche's methods for computing price indices. Discuss how Marshall - Edgeworth formula leads to a compromise between the two methods.
- (d) Describe the exponential growth curve. Explain how one checks whether a given time series has exponential growth pattern and how one can fit an exponential trend to a time series.
- (e) What is the percentile score of a student in a test ? Suppose that the original scores of the student in a test are approximately normally distributed. Then what will be the mean and the variance of the percentile scores ? 5×12=60

खण्ड ख

5. (क) AR(1) प्रक्रम के लिए जो कि परिभाषित है
- $$X_t = 0.6 X_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ से जहाँ } t = 1, 2, 3, \dots, X_0 = 0$$
- और $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ स्वतंत्र $N(0, \sigma^2)$ चर हैं, स्पेक्ट्रम (अर्थात् स्पेक्ट्रमी घनत्व) का व्यंजक क्या है ?
- (ख) रैखिक बहुसमाश्रयण में बहुसरेखता की समस्या का वर्णन कीजिए। प्राचल आकलन को यह कैसे प्रभावित करता है ? इस समस्या के लिए किसी हल का वर्णन कीजिए।
- (ग) मूल्य सूचकांकों का अभिकलन करने के लिए लैस्परे और पारो विधियों का वर्णन कीजिए। चर्चा कीजिए कि मार्शल-एजवर्थ सूत्र दोनों विधियों के बीच कैसे समझौते की ओर ले जाता है।
- (घ) चरघातांकी वृद्धि वक्र का वर्णन कीजिए। व्याख्या कीजिए कि कोई यह कैसे जाँचता है कि क्या एक दी हुई काल श्रेणी का चरघातांकी वृद्धि पैटर्न है और कोई एक काल श्रेणी के लिए एक चरघातांकी उपनति का कैसे आसंजन कर सकता है।
- (ङ) एक परीक्षण में एक विद्यार्थी का शततमक समंक क्या होता है ? कल्पना कीजिए कि एक परीक्षण में विद्यार्थी के मूल समंक सन्निकटतः प्रसामान्यतः बंटित हैं। तो शततमक समंकों के माध्य और प्रसरण क्या होंगे ?

5×12=60

6. (a) Consider the linear model

$$y_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, I \\ j = 1, \dots, J,$$

ε_{ij} 's are independent $N(0, \sigma^2)$ variables. Obtain the least squares estimates of $\alpha_r - \alpha_s$ and $\beta_p - \beta_q$ for $r, s = 1, \dots, I, r \neq s$ and $p, q = 1, \dots, J, p \neq q$. Obtain also the variance expressions for those least squares estimates.

30

- (b) Derive the normal equations for fitting a linear trend to time series data. Suppose that a time series X_t has been observed at time points

$$t = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm 19, \pm 21 \text{ and for this series} \\ \sum_t X_t = 528.2 \quad \text{and} \quad \sum_t t X_t = -1956.4.$$

Determine the linear trend equation that will fit the data.

30

7. (a) What is the Logistic curve? Describe in detail the method of Pearl and Reed and also Rhodes' method for fitting a logistic curve to population data.

30

- (b) Define Irving Fisher's "ideal" price index. Explain why it is called an "ideal" index by giving relevant mathematical details. Give an example of well-known price-index formula that is not "ideal" and explain why it is so.

30

6. (क) मान लीजिए रैखिक निदर्श

$$y_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, I \\ j = 1, \dots, J,$$

ε_{ij} 's स्वतंत्र $N(0, \sigma^2)$ चर हैं। $\alpha_r - \alpha_s$ और $\beta_p - \beta_q$ के $r, s = 1, \dots, I, r \neq s$ और $p, q = 1, \dots, J, p \neq q$ के लिए न्यूनतम वर्ग आकल प्राप्त कीजिए। उन न्यूनतम वर्ग आकलों के लिए प्रसरण व्यंजक भी प्राप्त कीजिए। 30

(ख) काल श्रेणी दत्तों से एक रैखिक उपनति आसंजन के लिए प्रसामान्य समीकरणों को व्युत्पन्न कीजिए। कल्पना कीजिए कि एक काल श्रेणी X_t काल बिन्दुओं

$t = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm 19, \pm 21$ पर प्रेक्षित हुई है और इस श्रेणी के लिए $\sum_t X_t = 528.2$ और

$$\sum_t t X_t = -1956.4 \text{ हैं। रैखिक उपनति समीकरण}$$

निर्धारित कीजिए जो इस दत्त से आसंजित होगा। 30

7. (क) वृद्धिपात वक्र क्या होता है ? जनसंख्या आँकड़ों से एक वृद्धिपात वक्र के आसंजन के लिए पर्ल तथा रीड विधि और रोहड्स विधि का वर्णन विस्तार में कीजिए। 30

(ख) इर्विंग फिशर के “आदर्श” मूल्य सूचकांक को परिभाषित कीजिए। संबद्ध गणितीय विवरण देते हुए स्पष्ट कीजिए कि यह एक “आदर्श” सूचकांक क्यों कहलाता है। एक सुप्रसिद्ध मूल्य-सूचकांक सूत्र का उदाहरण दीजिए जो “आदर्श” नहीं है और यह ऐसा क्यों है, स्पष्ट कीजिए। 30

8. (a) Give a brief outline of factor analysis and discuss its importance in Psychometric studies.
- (b) Distinguish between an abridged life table and a complete life table. Discuss a method of constructing abridged life table.
- (c) What is reliability of test scores and how is it determined ?
- (d) Write a note on official agencies responsible for data collection on trade and prices. *4×15=60*

8. (क) कारक विश्लेषण की एक संक्षिप्त रूपरेखा दीजिए और साइकोमेट्रिक अध्ययनों में इसके महत्त्व की चर्चा कीजिए ।
- (ख) संक्षिप्त वय-सारणी और पूर्ण वय-सारणी में अंतर्भेद कीजिए । संक्षिप्त वय-सारणी की रचना के लिए एक विधि की चर्चा कीजिए ।
- (ग) परीक्षण समंकों की विश्वसनीयता क्या होती है और यह कैसे निर्धारित होती है ?
- (घ) व्यापार और मूल्यों पर दत्त संचय के लिए जिम्मेदार सरकारी एजेन्सियों पर एक टिप्पणी लिखिए । $4 \times 15 = 60$

सांख्यिकी प्रश्न-पत्र II

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं । बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अन्त में दिये गए हैं ।

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

प्रतीकों/संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो ।

चार्ट/चित्र, जहाँ आवश्यक हो, उत्तर-पुस्तिका पर बनाइए, पृथक् ग्राफ पेपर पर नहीं ।

महत्त्वपूर्ण : यह आवश्यक है कि जब भी किसी प्रश्न का उत्तर दे रहे हों, तब उस प्रश्न के सभी भागों/उप-भागों के उत्तर साथ-साथ दें । इसका अर्थ यह है कि अगले प्रश्न का उत्तर लिखने के लिए आगे बढ़ने से पूर्व पिछले प्रश्न के सभी भागों/उप-भागों के उत्तर समाप्त हो जाएँ । इस बात का कड़ाई से अनुसरण कीजिए ।

उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े हुए पृष्ठों को स्याही में स्पष्ट रूप से काट दें । खाली छूटे हुए पृष्ठों के बाद लिखे हुए उत्तरों के अंक न दिए जाएँ, ऐसा हो सकता है ।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.