CS(M) EXAM2012

Sl. No.

F-DTN-M-NUIB

MATHEMATICS

Paper II

Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English. Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. 1 and 5 which are compulsory and any ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

A graph sheet is attached to this question paper for use by the candidate. The graph sheet is to be carefully detached from the question paper and securely fastened to the answer-book.

Important : Whenever a Question is being attempted, all its parts/sub-parts must be attempted contiguously. This means that before moving on to the next Question to be attempted, candidates must finish attempting all parts/sub-parts of the previous Question attempted. This is to be strictly followed.

Pages left blank in the answer-book are to be clearly struck out in ink. Any answers that follow pages left blank may not be given credit.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section 'A'

1. (a) How many elements of order 2 are there in the group of order 16 generated by a and b such that the order of a is 8, the order of b is 2 and $bab^{-1} = a^{-1}$. 12

(b) Let

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < \frac{1}{n+1}, \\ \sin\frac{\pi}{x}, & \text{if } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{if } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Show that $f_n(x)$ converges to a continuous function but not uniformly. 12

(c) Show that the function defined by

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 y^5 (x+iy)}{x^6 + y^{10}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

is not analytic at the origin though it satisfies Cauchy-Riemann equations at the origin. 12

खंड 'क'

1. (क) a और b के द्वारा जनित कोटि 16 के समूह में कोटि 2 के तत्व कितने होते हैं, ऐसे कि a की कोटि 8 हो, b की कोटि 2 हो और $bab^{-1} = a^{-1}$ हो। 12

(ख) मान लीजिए

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } x < \dfrac{1}{n+1}, \\ \sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{यदि } \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{यदि } x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

दर्शाइए कि $f_n(x)$ संतत फलन को अभिसरित होता है, परन्तु एकसमान नहीं। 12

(ग) दर्शाइए कि

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^5 (x + iy)}{x^6 + y^{10}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

के द्वारा परिभाषित फलन उद्गम पर विश्लेषिक नहीं है, यद्यपि वह उद्गम पर कौशी-रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है। 12

(d) For each hour per day that Ashok studies mathematics, it yields him 10 marks and for each hour that he studies physics, it yields him 5 marks. He can study at most 14 hours a day and he must get at least 40 marks in each. Determine graphically how many hours a day he should study mathematics and physics each, in order to maximize his marks ? 12

(e) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^{n} n^{6}$ is convergent. 12

2. (a) How many conjugacy classes does the permutation group S_5 of permutations 5 numbers have ? Write down one element in each class (preferably in terms of cycles). 15

(b) Let $f(x, y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0,\ 0) \\ 1, & \text{if } (x, y)=(0,\ 0).\end{cases}$

Show that $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ exist at (0, 0) though $f(x, y)$ is not continuous at (0, 0). 15

(c) Use Cauchy integral formula to evaluate

$$\int_c \frac{e^{3z}}{(z+1)^4}\,dz, \text{ where } c \text{ is the circle } |z|=2.$$

15

(घ) अशोक के प्रतिदिन एक घण्टा गणित का अध्ययन करने पर, उसको 10 अंकों की प्राप्ति होती है और उसके भौतिकी के अध्ययन के प्रत्येक घण्टे के लिए उसको 5 अंकों की प्राप्ति होती है। वह प्रतिदिन अधिक से अधिक 14 घण्टे अध्ययन कर सकता है और उसके लिए प्रत्येक में कम से कम 40 अंक प्राप्त करना आवश्यक है। ग्राफीयतः निर्धारण कीजिए कि अपने अंकों का अधिकतमीकरण करने के लिए, उसको प्रतिदिन कितने घण्टे गणित और कितने घण्टे भौतिकी का अध्ययन करना चाहिए। 12

(ङ) दर्शाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\pi+1}\right)^{n} n^{6}$ अभिसारी है। 12

2. (क) 5 संख्याओं के क्रमचय के क्रमचय समूह S_5 के कितने संयुग्मन वर्ग होते हैं ? प्रत्येक वर्ग में एक तत्व लिखिए (बेहतर होगा चक्रों के रूप में) 15

(ख) मान लीजिए

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \text{ यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 \quad , \text{ यदि } (x, y)=(0, 0).\end{cases}$$

दर्शाइए कि $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ का (0, 0) पर अस्तित्व है यद्यपि $f(x, y)$ संतत नहीं है (0, 0) पर। 15

(ग) $\int_c \frac{e^{3z}}{(z+1)^4} dz,$ का मूल्यांकन करने के लिए कौशी समाकल फार्मूला इस्तेमाल कीजिए, जहाँ c वृत्त $|z|=2$ है। 15

(d) Find the minimum distance of the line given by the planes $3x+4y+5z=7$ and $x-z=9$ from the origin, by the method of Lagrange's multipliers. 15

3. (a) Is the ideal generated by 2 and X in the polynomial ring $\mathbb{Z}[X]$ of polynomials in a single variable X with coefficients in the ring of integers $\mathbb{Z}$, a principal ideal ? Justify your answer. 15

(b) Let $f(x)$ be differentiable on $[0, 1]$ such that $f(1) = f(0) = 0$ and $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 1$. Prove that $\int_0^1 x f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$. 15

(c) Expand the function $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ in Laurent series valid for

(i) $1<|z|<3$ (ii) $|z|>3$ (iii) $0<|z+1|<2$ (iv) $|z|<1$ 15

(d) Evaluate by contour integration

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2},\quad a^2<1.$$ 15

(घ) समतलों $3x + 4y + 5z = 7$ और $x - z = 9$ के द्वारा दत्त रेखा का, लग्रांज के गुणकों की विधि के द्वारा, उद्गम से न्यूनतम दूरी मालूम कीजिए। 15

3. (क) पूर्णांकों $\mathbb{Z}$ के वलय में गुणांकों सहित एक ही चर X में बहुपदों के बहुपद वलय $\mathbb{Z}[X]$ में 2 और X के द्वारा जनित गुणजावली क्या मुख्य गुणजावली होती है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क प्रस्तुत कीजिए। 15

(ख) मान लीजिए कि $f(x)$ अवकलनीय है $[0, 1]$ पर, ऐसे कि $f(1) = f(0) = 0$ और $\int_0^1 f^2(x)\, dx = 1$. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^1 x f(x) f'(x)\, dx = -\tfrac{1}{2}.$$ 15

(ग) फलन $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ का,

(i) $1 < |z| < 3$ (ii) $|z| > 3$ (iii) $0 < |z+1| < 2$ (iv) $|z| < 1$ के लिए वैध, लौराँ श्रेणी में प्रसार कीजिए। 15

(घ) कंटूर समाकलन के द्वारा मूल्यांकन कीजिए

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2},\ a^2 < 1$$ 15

4. (a) Describe the maximal ideals in the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a, b\in \mathbb{Z}\}$. 20

(b) Give an example of a function $f(x)$, that is not Riemann integrable but $|f(x)|$ is Riemann integrable. Justify. 20

(c) By the method of Vogel, determine an initial basic feasible solution for the following transportation problem :

Products P_1, P_2, P_3 and P_4 have to be sent to destinations D_1, D_2 and D_3. The cost of sending product P_i to destinations D_j is C_{ij}, where the matrix

$$[C_{ij}]=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 15 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 11 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

The total requirements of destinations D_1, D_2 and D_3 are given by 45, 45, 95 respectively and the availability of the products P_1, P_2, P_3 and P_4 are respectively 25, 35, 55 and 70. 20

Section 'B'

5. (a) Solve the partial differential equation

$$(D-2D')(D-D')^2 z = e^{x+y}.$$ 12

(b) Use Newton-Raphson method to find the real root of the equation $3x = \cos x + 1$ correct to four decimal places. 12

4. (क) गाउसीय पूर्णांकों

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ के वलय में उच्चिष्ठ गुणजावलियों का वर्णन कीजिए। 20

(ख) फलन $f(x)$ का एक ऐसा उदाहरण प्रस्तुत कीजिए, जो रीमान समाकलनीय न हो परंतु $|f(x)|$ रीमान समाकलनीय हो। उत्तर उचित ठहराइए। 20

(ग) निम्नलिखित परिवहन समस्या के लिए, वोगेल की विधि के द्वारा, आरंभिक आधारिक साध्य हल का निर्धारण कीजिए :

उत्पादों P_1, P_2, P_3 . और P_4 को गंतव्यों D_1, D_2 और D_3 तक भेजना है। उत्पाद P_i को गंतव्यों D_j तक भेजने की लागत C_{ij} है, जहाँ आव्यूह

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 15 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 11 & 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

गंतव्यों D_1, D_2 और D_3 की कुल आवश्यकताएं क्रमशः 45, 45, 95 हैं, और उत्पादों P_1, P_2, P_3 और P_4 की उपलब्धता क्रमशः 25, 35, 55 और 70 हैं। 20

खंड 'ख'

5. (क) आंशिक अवकल समीकरण

$(D - 2D')(D - D')^2 z = e^{x+y}$ हल कीजिए। 12

(ख) समीकरण $3x = \cos x + 1$ का, चार दशमलव स्थानों तक सही, वास्तविक मूल मालूम करने के लिए, न्यूटन-रैफ़सन विधि का इस्तेमाल कीजिए। 12

(c) Provide a computer algorithm to solve an ordinary differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ in the interval $[a, b]$ for n number of discrete points, where the initial value is $y(a) = \alpha$, using Euler's method. 12

(d) Obtain the equations governing the motion of a spherical pendulum. 12

(e) A rigid sphere of radius a is placed in a stream of fluid whose velocity in the undisturbed state is V. Determine the velocity of the fluid at any point of the disturbed stream. 12

6. (a) Solve the partial differential equation $px + qy = 3z$. 20

(b) A string of length l is fixed at its ends. The string from the mid-point is pulled up to a height k and then released from rest. Find the deflection $y(x, t)$ of the vibrating string. 20

(c) Solve the following system of simultaneous equations, using Gauss-Seidel iterative method :

$$3x + 20y - z = -18$$
$$20x + y - 2z = 17$$
$$2x - 3y + 20z = 25.$$

20

7. (a) Find $\frac{dy}{dx}$ at $x = 0{\cdot}1$ from the following data :

x :	0·1	0·2	0·3	0·4
y :	0·9975	0·9900	0·9776	0·9604

20

(ग) साधारण अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ को अंतराल $[a, b]$ में, असंतत बिंदुओं की n संख्या के लिए, इयूलर विधि का इस्तेमाल करते हुए, हल करने के लिए एक कंप्यूटर ऐल्गोरिथ्म प्रदान कीजिए, जहाँ आरंभिक मान $y(a) = \alpha$ हो। 12

(घ) गोलीय लोलक की गति का नियंत्रण करने वाले समीकरणों को प्राप्त कीजिए। 12

(ङ) त्रिज्या a के एक दृढ़ गोलक को एक ऐसे तरल की धारा में रखा जाता है, जिसका अविक्षुब्ध अवस्था में वेग V है। उस तरल की विक्षुब्ध धारा के किसी बिंदु पर वेग का निर्धारण कीजिए। 12

6. (क) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए : $px + qy = 3z$ 20

(ख) लंबाई l का एक तार अपने दोनों सिरों पर बंधा हुआ है। उसके मध्य बिंदु से ऊँचाई k तक उसको ऊपर खींचा जाता है। और उसके बाद विरामावस्था से छोड़ दिया जाता है। कंपमान तार का विक्षेपण $y(x, t)$ मालूम कीजिए। 20

(ग) गाउस-साइडेल पुनरावृत्तिमूलक विधि का इस्तेमाल करते हुए, युगपत् समीकरणों के निम्नलिखित तंत्र को हल कीजिए :

$$3x + 20y - z = -18$$
$$20x + y - 2z = 17$$
$$2x - 3y + 20z = 25.$$

20

7. (क) निम्नलिखित आंकड़ों से $\frac{dy}{dx}$ से $x = 0{\cdot}1$ मालूम कीजिए :

x :	0·1	0·2	0·3	0·4
y :	0·9975	0·9900	0·9776	0·9604

20

(b) The edge $r = a$ of a circular plate is kept at temperature $f(\theta)$. The plate is insulated so that there is no loss of heat from either surface. Find the temperature distribution in steady state. 20

(c) In a certain examination, a candidate has to appear for one major and two minor subjects. The rules for declaration of results are : marks for major are denoted by M_1 and for minors by M_2 and M_3. If the candidate obtains 75% and above marks in each of the three subjects, the candidate is declared to have passed the examination in first class with distinction. If the candidate obtains 60% and above marks in each of the three subjects, the candidate is declared to have passed the examination in first class. If the candidate obtains 50% or above in major, 40% or above in each of the two minors and an average of 50% or above in all the three subjects put together, the candidate is declared to have passed the examination in second class. All those candidates, who have obtained 50% and above in major and 40% or above in minor, are declared to have passed the examination. If the candidate obtains less than 50% in major or less than 40% in any one of the two minors, the candidate is declared to have failed in the examinations. Draw a flow chart to declare the results for the above. 20

(ख) एक वृत्ताकार प्लेट के किनारे $r = a$ को ताप $f(\theta)$ पर रखा जाता है। प्लेट ऊष्मारोधी है ताकि किसी भी पृष्ठ से ऊष्मा की हानि न हो। स्थायी अवस्था में ताप वितरण मालूम कीजिए। 20

(ग) एक विशेष परीक्षा में, उम्मीदवार को एक मेज़र और दो माइनर विषयों में परीक्षा देनी होती है। परिणामों की घोषणा के नियम हैं कि मेजर के लिए अंक M_1 के द्वारा और माइनर के लिए अंक M_2 और M_3 के द्वारा चिह्नित किए जाते हैं। यदि कोई उम्मीदवार तीनों विषयों में 75% या उसके ऊपर अंक प्राप्त करता है तो उसको 'पास्ड विद डिस्टिंक्शन' घोषित किया जाता है। यदि उम्मीदवार को तीनों विषयों में 60% और ऊपर अंक मिलते हैं, तो उम्मीदवार को 'प्रथम श्रेणी में पास' घोषित किया जाता है। यदि उम्मीदवार को मेज़र में 50% या ऊपर, दोनों माइनरों में 40% या ऊपर अंक प्राप्त होते हैं, और सभी विषयों में प्राप्तांकों की औसत में 50% या ऊपर अंक प्राप्त होते हैं तो उसको 'द्वितीय श्रेणी में पास' घोषित किया जाता है। उन सभी उम्मीदवारों को, जो मेजर में 50% या ऊपर और माइनरों में 40% या ऊपर अंक प्राप्त करते हैं, 'पास' घोषित किया जाता है। यदि उम्मीदवार को मेजर में 50% से या किसी भी माइनर में 40% से कम अंक प्राप्त होते हैं तो उस उम्मीदवार को 'फेल' घोषित किया जाता है। उपरोक्त के परिणामों की घोषणा करने के लिए एक प्रवाह चार्ट बनाइए। 20

8. (a) A pendulum consists of a rod of length $2a$ and mass m; to one end of which a spherical bob of radius $a/3$ and mass 15 m is attached. Find the moment of inertia of the pendulum :

   (i) about an axis through the other end of the rod and at right angles to the rod. 15

   (ii) about a parallel axis through the centre of mass of the pendulum.

   [Given : The centre of mass of the pendulum is $a/12$ above the centre of the sphere.] 15

(b) Show that $\phi = x\, f(r)$ is a possible form for the velocity potential for an incompressible fluid motion. If the fluid velocity $\vec{q} \to 0$ as $r \to \infty$, find the surfaces of constant speed. 30

8. (क) एक लोलक $2a$ लंबाई की एक छड़ और द्रव्यमान m से बना हुआ है। उसके एक सिरे पर त्रिज्या $a/3$ और द्रव्यमान 15 m का एक वृत्ताकार लटकन जुड़ा हुआ है। लोलक का जड़त्व आघूर्ण मालूम कीजिए :

(i) छड़ के दूसरे सिरे के बीच से गुजरने वाले और छड़ के समकोण अक्ष के इर्दगिर्द। 15

(ii) लोलक के द्रव्यमान-केन्द्र के बीच से समांतर अक्ष के इर्दगिर्द।

[दत्त : लोलक का द्रव्यमान-केन्द्र गोलक के केन्द्र से $a/12$ ऊपर है।] 15

(ख) दर्शाइए कि $\phi = x\, f(r)$ एक असंपीड्य तरल गति के वेग विभव के लिए एक संभव रूप है। यदि जैसे $r \to \infty$, तैसे तरल वेग $\vec{q} \to 0$ हो, तो अपरिवर्ती रफ्तार के पृष्ठों को मालूम कीजिए। 30

F-DTN-M-NUIB

गणित

प्रश्न-पत्र II

समय : तीन घण्टे | *पूर्णांक : 300*

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इस प्रश्न पत्र के साथ उम्मीदवारों के उपयोग के लिए ग्राफ शीट संलग्न है। ग्राफ शीट को सावधानीपूर्वक प्रश्न पत्र से अलग कर उत्तर पुस्तिका के साथ अच्छी तरह बांध दें।

यह आवश्यक है कि जब भी किसी प्रश्न का उत्तर दे रहे हों, तब उस प्रश्न के सभी भागों/उप-भागों के उत्तर साथ-साथ दें। इसका अर्थ यह है कि अगले प्रश्न का उत्तर लिखने के लिए आगे बढ़ने से पूर्व पिछले प्रश्न के सभी भागों/उप-भागों के उत्तर समाप्त हो जांय। इस बात का कड़ाई से अनुसरण कीजिए।

उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े हुए पृष्ठों को स्याही में स्पष्ट रूप से काट दें। खाली छुटे हुए प्रश्नों के बाद लिखे हुए उत्तरों के अंक न दिए जाएँ, ऐसा हो सकता है।

***Note :** English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*