CSE EXAM 2012

S

F–DTN–M–NUIA

MATHEMATICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. ***1*** *and* ***5****, which are compulsory, and any* ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/notations carry their usual meanings, unless otherwise indicated.

Important Note : *Whenever a question is being attempted, all its parts/sub-parts must be attempted contiguously. This means that before moving on to the next question to be attempted, candidates must finish attempting all parts/sub-parts of the previous question attempted. This is to be strictly followed.*

Pages left blank in the answer-book are to be clearly struck out in ink. Any answers that follow pages left blank may not be given credit.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section—A

1. *(a)* Define a function f of two real variables in the xy-plane by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos\frac{1}{y} + y^3 \cos\frac{1}{x}}{x^2 + y^2} & \text{for } x, y \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Check the continuity and differentiability of f at $(0, 0)$. 12

(b) Let p and q be positive real numbers such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Show that for real numbers $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$ 12

(c) Prove or disprove the following statement : 12

If $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ is a basis for $\mathbb{R}^5$ and V is a two-dimensional subspace of $\mathbb{R}^5$, then V has a basis made of just two members of B.

(d) Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation defined by

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + 2\beta - 3\gamma,\ 2\alpha + 5\beta - 4\gamma,\ \alpha + 4\beta + \gamma)$$

Find a basis and the dimension of the image of T and the kernel of T. 12

खण्ड—क

1. (क) xy-समतल में दो वास्तविक चरों के फलन f की

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos\frac{1}{y} + y^3 \cos\frac{1}{x}}{x^2 + y^2} & x, y \neq 0 \text{ हेतु} \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषा दीजिए। (0, 0) पर f के सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच कीजिए। 12

(ख) मान लीजिए p और q ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं कि $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ है। दर्शाइए कि वास्तविक संख्याओं

$a, b \geq 0$ के लिए $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ है। 12

(ग) निम्नलिखित कथन को सिद्ध कीजिए अथवा उसका खण्डन कीजिए : 12

यदि $\mathbb{R}^5$ के लिए $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ एक आधार हो और V एक द्वि-विमीय उपसमष्टि हो $\mathbb{R}^5$ की, तो V का एक आधार होगा जो B के केवल दो सदस्यों से बना हुआ होगा।

(घ) मान लीजिए $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपान्तरण है, जो

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + 2\beta - 3\gamma,\ 2\alpha + 5\beta - 4\gamma,\ \alpha + 4\beta + \gamma)$$

द्वारा परिभाषित है। T की अष्टि और T के प्रतिबिम्ब का एक आधार और विमा ज्ञात कीजिए। 12

(e) Prove that two of the straight lines represented by the equation

$$x^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 = 0$$

will be at right angles, if $b + c = -2$. 12

2. (a) (i) Let V be the vector space of all 2×2 matrices over the field of real numbers. Let W be the set consisting of all matrices with zero determinant. Is W a subspace of V? Justify your answer. 8

(ii) Find the dimension and a basis for the space W of all solutions of the following homogeneous system using matrix notation : 12

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 4x_4 + 14x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(b) (i) Consider the linear mapping $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by

$$f(x, y) = (3x + 4y, 2x - 5y)$$

Find the matrix A relative to the basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ and the matrix B relative to the basis $\{(1, 2), (2, 3)\}$. 12

(ii) If λ is a characteristic root of a non-singular matrix A, then prove that $\frac{|A|}{\lambda}$ is a characteristic root of Adj A. 8

(ङ) सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$$x^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 = 0$$

द्वारा निरूपित ऋजु रेखाओं में से दो समकोणों पर होंगी, यदि $b + c = -2$ हो। 12

2. (क) *(i)* मान लीजिए V वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर सभी 2×2 आव्यूहों की सदिश समष्टि है। मान लीजिए W शून्य सारणिक सहित सभी आव्यूहों वाला समुच्चय है। क्या W एक उपसमष्टि है V की? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए। 8

(ii) निम्नलिखित समघात निकाय के सभी हलों की समष्टि W के लिए आव्यूह संकेतन का इस्तेमाल करते हुए विमा और एक आधार ज्ञात कीजिए : 12

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 4x_4 + 14x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(ख) *(i)* $f(x, y) = (3x + 4y, 2x - 5y)$ द्वारा रैखिक प्रतिचित्रण $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ पर विचार कीजिए। आधार $\{(1, 0), (0, 1)\}$ से सम्बन्धित आव्यूह A और आधार $\{(1, 2), (2, 3)\}$ से सम्बन्धित आव्यूह B ज्ञात कीजिए। 12

(ii) यदि λ व्युत्क्रमणीय आव्यूह A का एक अभिलाक्षणिक मूल हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{|A|}{\lambda}$ एक अभिलाक्षणिक मूल है Adj A का। 8

(c) Let

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 2+i \\ -i & 2 & 1-i \\ 2-i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

be a Hermitian matrix. Find a non-singular matrix P such that $D = P^T H \overline{P}$ is diagonal. 20

3. (a) Find the points of local extrema and saddle points of the function f of two variables defined by

$$f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 63(x+y) + 12xy$$ 20

(b) Define a sequence s_n of real numbers by

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\log(n+i) - \log n)^2}{n+i}$$

Does $\lim_{n \to \infty} s_n$ exist? If so, compute the value of this limit and justify your answer. 20

(c) Find all the real values of p and q so that the integral $\int_0^1 x^p (\log \frac{1}{x})^q \, dx$ converges. 20

4. (a) Compute the volume of the solid enclosed between the surfaces $x^2 + y^2 = 9$ and $x^2 + z^2 = 9$. 20

(ग) मान लीजिए

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 2+i \\ -i & 2 & 1-i \\ 2-i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

एक हर्मिटी आव्यूह है। एक ऐसे व्युत्क्रमणीय आव्यूह P को ज्ञात कीजिए कि $D = P^T H \overline{P}$ विकर्णी हो। 20

3. (क) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x+y) + 12xy$ द्वारा परिभाषित दो चरों के फलन f के स्थानीय चरम मानों के बिन्दुओं और पल्याण बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। 20

(ख) $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\log(n+i) - \log n)^2}{n+i}$ द्वारा वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम s_n की परिभाषा दीजिए। क्या $\lim_{n \to \infty} s_n$ का अस्तित्व है? यदि ऐसा है, तो इस सीमा के मान का परिकलन कीजिए और अपने उत्तर के पक्ष में तर्क प्रस्तुत कीजिए। 20

(ग) p और q के सभी वास्तविक मानों को ज्ञात कीजिए, ताकि समाकल $\int_0^1 x^p (\log \frac{1}{x})^q \, dx$ अभिसरण करे। 20

4. (क) पृष्ठों $x^2 + y^2 = 9$ और $x^2 + z^2 = 9$ के बीच परिबद्ध ठोस के आयतन का परिकलन कीजिए। 20

(b) A variable plane is parallel to the plane

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

and meets the axes in A, B, C respectively. Prove that the circle ABC lies on the cone

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$ 20

(c) Show that the locus of a point from which the three mutually perpendicular tangent lines can be drawn to the paraboloid $x^2+y^2+2z=0$ is

$$x^2+y^2+4z=1$$ 20

Section—B

5. (a) Solve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2(1+e^{(x/y)^2})+2x^2e^{(x/y)^2}}$$ 12

(b) Find the orthogonal trajectories of the family of curves $x^2+y^2=ax$. 12

(c) Using Laplace transforms, solve the initial value problem

$$y''+2y'+y=e^{-t},\ y(0)=-1,\ y'(0)=1$$ 12

(ख) एक चर समतल अन्य समतल

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

के समान्तर है और क्रमशः A, B, C में अक्षों से मिलता है। सिद्ध कीजिए कि वृत्त ABC, शंकु

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$

पर स्थित है। 20

(ग) दर्शाइए कि एक ऐसे बिन्दु, जहाँ से परवलयज $x^2+y^2+2z=0$ तक तीन परस्पर लम्ब स्पर्श-रेखाएँ खींची जा सकती हैं, का बिन्दुपथ $x^2+y^2+4z=1$ है। 20

खण्ड—ख

5. (क) हल कीजिए : 12

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2(1+e^{(x/y)^2})+2x^2e^{(x/y)^2}}$$

(ख) वक्र-कुलों $x^2+y^2=ax$ के लम्बकोणीय प्रपथों को ज्ञात कीजिए। 12

(ग) लाप्लास रूपान्तरों का इस्तेमाल करते हुए प्रारम्भिक मान समस्या

$$y''+2y'+y=e^{-t},\ y(0)=-1,\ y'(0)=1$$

को हल कीजिए। 12

(d) A particle moves with an acceleration

$$\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$$

towards the origin. If it starts from rest at a distance a from the origin, find its velocity when its distance from the origin is $\frac{a}{2}$. 12

(e) If

$$\vec{A} = x^2 yz\vec{i} - 2xz^3\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2z\vec{i} + y\vec{j} - x^2\vec{k}$$

find the value of $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} \times \vec{B})$ at $(1, 0, -2)$. 12

6. (a) Show that the differential equation

$$(2xy \log y)\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})\, dy = 0$$

is not exact. Find an integrating factor and hence, the solution of the equation. 20

(b) Find the general solution of the equation $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$. 20

(c) Solve the ordinary differential equation

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$$ 20

(घ) एक कण त्वरण

$$\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$$

के साथ उद्गम की ओर गति करता है। यदि वह विरामावस्था से उद्गम से दूरी a से शुरू करे, तो उद्गम से $\frac{a}{2}$ की दूरी पर उसके वेग को ज्ञात कीजिए। 12

(ङ) यदि

$$\vec{A} = x^2yz\vec{i} - 2xz^3\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2z\vec{i} + y\vec{j} - x^2\vec{k}$$

तो (1, 0, –2) पर $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} \times \vec{B})$ का मान ज्ञात कीजिए। 12

6. (क) दर्शाइए कि अवकल समीकरण

$$(2xy\log y)\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\, dy = 0$$

यथातथ्य नहीं है। समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए और अतएव समीकरण का हल ज्ञात कीजिए। 20

(ख) समीकरण $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 20

(ग) साधारण अवकल समीकरण

$$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$$

को हल कीजिए। 20

7. *(a)* A heavy ring of mass m, slides on a smooth vertical rod and is attached to a light string which passes over a small pulley distant a from the rod and has a mass M ($> m$) fastened to its other end. Show that if the ring be dropped from a point in the rod in the same horizontal plane as the pulley, it will descend a distance $\frac{2Mma}{M^2 - m^2}$ before coming to rest. 20

(b) A heavy hemispherical shell of radius a has a particle attached to a point on the rim, and rests with the curved surface in contact with a rough sphere of radius b at the highest point. Prove that if $\frac{b}{a} > \sqrt{5} - 1$, the equilibrium is stable, whatever be the weight of the particle. 20

(c) The end links of a uniform chain slide along a fixed rough horizontal rod. Prove that the ratio of the maximum span to the length of the chain is

$$\mu \log\left[\frac{1 + \sqrt{1 + \mu^2}}{\mu}\right]$$

where μ is the coefficient of friction. 20

8. *(a)* Derive the Frenet-Serret formulae. Define the curvature and torsion for a space curve. Compute them for the space curve

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = \tfrac{2}{3}t^3$$

Show that the curvature and torsion are equal for this curve. 20

7. (क) द्रव्यमान m का एक भारी वलय, एक चिक्कण ऊर्ध्वाधर छड़ पर सर्पण करता है और वह एक ऐसी हल्की डोर से जुड़ा हुआ है जो छड़ से दूरी a पर एक छोटी घिरनी पर से गुज़रती है और जिसके दूसरे सिरे पर एक द्रव्यमान $M\ (> m)$ जुड़ा हुआ है। दर्शाइए कि यदि वलय को छड़ में एक ऐसे बिन्दु से गिरा दिया जाय जो घिरनी के क्षैतिज समतल में हो, तो विरामावस्था तक पहुँचने से पूर्व वह वलय दूरी $\dfrac{2Mma}{M^2 - m^2}$ तक नीचे उतर आएगा। 20

(ख) त्रिज्या a के एक भारी अर्धगोलीय खोल के रिम पर एक बिन्दु पर एक कण जुड़ा हुआ है और वह खोल, त्रिज्या b के एक खुरदरे गोलक के साथ उच्चतम बिन्दु पर सम्पर्क में अपने वक्र पृष्ठ पर टिका हुआ है। सिद्ध कीजिए कि यदि $\dfrac{b}{a} > \sqrt{5} - 1$ हो, तो कण का भार चाहे जो भी हो, साम्यावस्था स्थायी ही होगी। 20

(ग) एक एकसमान शृंखला (चेन) के सिरे की कड़ियाँ एक आबद्ध खुरदरी क्षैतिज छड़ के साथ-साथ सरकती हैं। सिद्ध कीजिए कि अधिकतम विस्तृति का चेन की लम्बाई पर अनुपात $\mu \log \left[\dfrac{1 + \sqrt{1 + \mu^2}}{\mu} \right]$ है, जहाँ μ घर्षण गुणांक है। 20

8. (क) फ्रेनेट-सेरेट फॉर्मूले व्युत्पन्न कीजिए। आकाश वक्र के लिए वक्रता और विमोटन की परिभाषा दीजिए। आकाश वक्र

$$x = t,\ y = t^2,\ z = \tfrac{2}{3} t^3$$

के लिए उनका परिकलन कीजिए। दर्शाइए कि इस वक्र के लिए वक्रता और विमोटन बराबर हैं। 20

(b) Verify Green's theorem in the plane for

$$\oint_C [(xy + y^2)\, dx + x^2 dy]$$

where C is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$. 20

(c) If $\vec{F} = y\vec{i} + (x - 2xz)\vec{j} - xy\vec{k}$, evaluate

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\vec{s}$$

where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy-plane. 20

(ख) $\oint_C [(xy + y^2)\, dx + x^2 dy]$ के लिए समतल में ग्रीन के प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ C संवृत वक्र है, $y = x$ और $y = x^2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का। 20

(ग) यदि $\vec{F} = y\vec{i} + (x - 2xz)\vec{j} - xy\vec{k}$, तो

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\vec{s}$$

का मानांकन कीजिए, जहाँ S गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का xy-समतल से ऊपर का पृष्ठ है। 20

★ ★ ★

F–DTN–M–NUIA

गणित

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे	पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अंत में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीक/संकेत प्रचलित अर्थों में प्रयुक्त हैं, अन्यथा निर्दिष्ट हैं।

विशेष निर्देश : *यह आवश्यक है कि जब भी किसी प्रश्न का उत्तर दे रहे हों, तब उस प्रश्न के सभी भागों/उप-भागों के उत्तर साथ-साथ दें। इसका अर्थ यह है कि अगले प्रश्न का उत्तर लिखने के लिए आगे बढ़ने से पूर्व पिछले प्रश्न के सभी भागों/उप-भागों के उत्तर समाप्त हो जाएँ। इस बात का कड़ाई से अनुसरण कीजिए।*

उत्तर-पुस्तक में खाली छोड़े हुए पृष्ठों को स्याही से स्पष्ट रूप से काट दीजिए। खाली छूटे हुए पृष्ठों के बाद लिखे हुए उत्तरों के अंक न दिए जाएँ, ऐसा हो सकता है।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.